İKİ BOYUTLU RASGELE DEĞİŞKENLER

Bir deney yapıldığında, aynı deneyle ilgili birçok rasgele değişkenin aynı andaki durumunu düşünmek gerekebilir. Örneğin, kitleden rasgele seçilmiş bazı kişilerin boy ve ağırlıkları, aile bireylerinin yaş ve kazançlarının ortak dağılımı, bir nesne yada bireyin bir yada daha çok karakteristiği üzerinde gözlemler yapılır ve onların ortak durumu araştırılabilir.

Düzgün bir paranın 3 atılışında gelen turaların sayısı X, ilk iki atıştaki turaların sayısı da Y olsun. S örnek uzayı ve X, Y nin değerleri verilmiştir.

S'nin öğesi	X	Y
TTT	3	2
TTY	2	2
TYT	2	1
YTT	2	1
TYY	1	1
YTY	1	1
YYT	1	0
YYY	0	0

Tabloda, $X=3$, $Y=2$ olayı TTT dir.

$$p(X=3, Y=2) = \frac{1}{8}$$

Buradaki ",", $X=3$ ve $Y=2$ olaylarının kesişimini göstermek üzere $\cap$ yerine kullanılır.

X ve Y nin tüm değerleri için olasılık tablosu aşağıda verilmiştir:

X \ Y	0	1	2	Satır Toplamı
0	1/8	0	0	1/8
1	1/8	1/4	0	3/8
2	0	1/4	1/8	3/8
3	0	0	1/8	1/8
Sütun Topl.	1/4	1/2	1/4	1

Satır Toplamı: X için Olasılık fonksiyonu

Sütun Topl.: Y için Olasılık fonk.

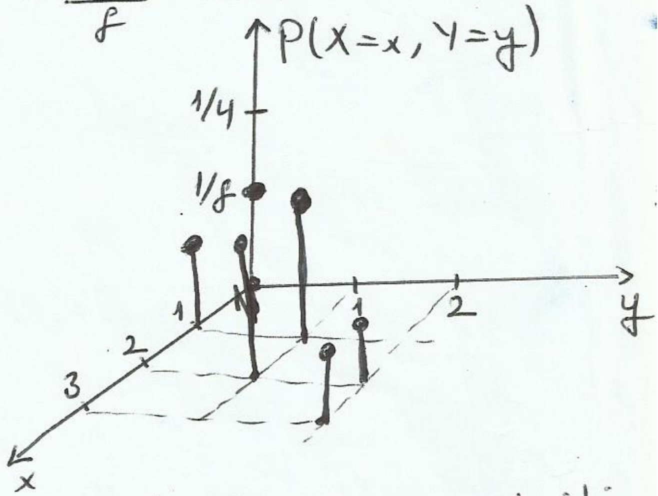
Bu tabloya X ve Y'nin ortak olasılık tablosu denir. Genel olarak $X=i$, $Y=j$ olma olasılığı, i-nci satır ve j-nci sütundaki değerdir. $p(X=i, Y=j)$ ile gösterilir.

X rasgele değişkeninin olasılık fonksiyonu herbir satırdaki öğelerin toplanması ile, Y değişkeninin olasılık fonksiyonu ise herbir sütundaki öğelerin toplanması ile bulunur.

$X=1$ olayının olasılığı,

$$p_1 = p(X=1) = p(X=1, Y=0) + p(X=1, Y=1) + p(X=1, Y=2)$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + 0 = \frac{3}{8} \text{ dir.}$$

Ortak olasılık fonksiyonu yandaki şekilde verilmiştir:



<u>Tanım</u> (Ortak Olasılık Fonksiyonu): (X, Y) sıralı ikili S örnek uzayında tanımlı iki boyutlu kesikli bir t.d. olsun. (X, Y) nin alacağı değerler (x_i, y_j) $i = 1, 2, \ldots, M$; $j = 1, 2, \ldots, N$ ise aşağıdaki koşulları sağlayan

$$f(x_i, y_j) = f_{xy}(x_i, y_j) = p(X=x_i, Y=y_j) \quad \ldots \quad (1)$$

fonksiyonuna X ve Y t.d. lerinin ortak olasılık fonksiyonu (o.o.f) yada ortak olasılık dağılımı denir. Koşullar;

1. $f(x_i, y_j) \geq 0 \quad \ldots \quad (2)$
2. $\sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{N} f(x_i, y_j) = 1 \quad \ldots \quad (3)$

* X ve Y t.d. lerinin o.o.f. nu aşağıdaki tabloda gösterilen formdadır. o.o.f. dan hem X, hem de Y'nin o.f. ları elde edilebilir.

X \ Y	y_1	$y_2 \cdots$	y_j	$\cdots y_N$	$P(X=x)$
x_1	$f(x_1,y_1)$	$f(x_1,y_2)$	$f(x_1,y_j)$	$f(x_1,y_N)$	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2,y_1)$	$f(x_2,y_2)$	$f(x_2,y_j)$	$f(x_2,y_N)$	$f(x_2)$
$\vdots$					
x_i	$f(x_i,y_1)$	$f(x_i,y_2)$	$f(x_i,y_j)$	$f(x_i,y_N)$	$f(x_i)$
$\vdots$					
x_M	$f(x_M,y_1)$	$f(x_M,y_2)$	$f(x_M,y_j)$	$f(x_M,y_N)$	$f(x_M)$
$P(Y=y)$	$f(y_1)$	$f(y_2)$	$f(y_j)$	$f(y_N)$	1

$p(X_1)$

Tablonun son sütunu X'in o.f. nunu gösterir ki buna, X'in marjinal olasılık fonksiyonu denir. X'in marjinal olasılık dağılımı aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $f(x_i) = f_X(x_i) = \sum_{j=1}^{N} f(x_i, y_j)$, $i = 1, 2, \ldots, M$ ... (4)
2. $\sum_{i=1}^{M} f(x_i) = 1$ ... (5)

Benzer olarak tablonun son satırı da Y'nin marjinal olasılık fonksiyonunu gösterir ve aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1. $f(y_j) = f_Y(y_j) = \sum_{i=1}^{M} f(x_i, y_j)$, $j = 1, \ldots, N$ ... (6)
2. $\sum_{j=1}^{N} f(y_j) = 1$ ... (7)

18.12. Pece, Pzrd.

Tanım (Ortak Olasılık Yoğunluk fonksiyonu): (X, Y) düzlemin bir D bölgesinde tüm değerleri alabilen sürekli bir t.d. olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan f fonksiyonuna (X,Y) nin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonu (o.o.y.f) denir.

1. $f(x,y) \geq 0 \quad \forall (x,y) \in D$ . . . . (f)

2. $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$ - - - - (g)

geç

Örnek : İki boyutlu sürekli (X,Y) t.d.nin o.o.y.f. nu

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + \dfrac{x\cdot y}{3}, & 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 2 \\ 0, & d.h. \end{cases}$$

veriliyor. $A = \{X+Y \geq 1\}$ olayının olasılığını bulunuz.

Çözüm: $f(x,y)$'nin o.o.y.f. olması için (g) eşitliği kontrol edilir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$\Rightarrow \int_{y=0}^{2}\int_{x=0}^{1}\left(x^2 + \frac{xy}{3}\right)dx\,dy = \int_0^2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{y\cdot x^2}{6}\right)\Bigg|_{x=0}^{1} dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{y}{6}\right)dy = \frac{1}{3}y + \frac{y^2}{12}\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$A = \{X+Y \geq 1\}$ olayının ~~için~~ olasılığı için kullanılır:

$$P(A) = 1 - P(A')$$

burada $A' = \{X+Y < 1\}$ olayıdır.

$$\Rightarrow P(A) = 1 - \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$= 1 - \int_{x=0}^{1}\int_0^{1-x}\left(x^2 + \frac{xy}{3}\right)dy\,dx$$

$$= 1 - \int_{x=0}^{1}\left(x^2 y + \frac{x\cdot y^2}{6}\right)\Bigg|_0^{1-x} dx$$

$$= 1 - \int_{x=0}^{1}\left(x^2(1-x) + \frac{x\cdot(1-x)^2}{6}\right)dx$$

$$= 1 - \int_0^1 \left(x^2 - x^3 + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{6}\right)dx$$

$$= 1 - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{24}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{12} - \frac{1}{9} + \frac{1}{24}\right)$$
$$\quad (24) \quad (18) \quad (6) \quad (8) \quad (3)$$

Önemli

$$= 1 - \left(\frac{24 - 18 + 6 - 8 + 3}{72}\right) = 1 - \frac{7}{72} = \frac{65}{72}$$ //

Doğru

Tanım (Ortak Dağılım Fonksiyonu): (X, Y) iki boyutlu (kesikli veya sürekli) bir t.d. olsun.
Bu t.d. nin ortak dağılım fonksiyonu,

$$F(x, y) = P(X \leq x,\ Y \leq y)$$

ile tanımlanır.

(X, Y), $f(x, y)$ o.y.f. ve $F(x, y)$ dağılım fonksiyonuna sahip iki boyutlu sürekli t.d. ise F'nin diferansiyellenebilir olduğu yerde,

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \, \partial y} = f(x, y)$$ dır.

Tanım: İki boyutlu (X, Y) t.d. nin o.o.y.f. nu f olsun. X ve Y'nin marjinal o.y.f. ları g ve h sırasıyla;

$$g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy$$

$$h(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx$$

olarak tanımlanır.

$(P(X \leq x)$